REGIONALES GYMNASIUM **LAUFENTAL-THIERSTEIN** **4242 Laufen**	**Maturitätsprüfungen 2015** **Mathematik (Profile A und B)** **Klasse 4AB**

Zeit: 4 Stunden
Hilfsmittel: Formelsammlung (Zelgli / Aarau), Taschenrechner TI-Voyage 200

- Es ist eine saubere Darstellung der Lösungen verlangt.
- Resultate sind, wenn nicht anders verlangt, exakt anzugeben.
- Grenzwerte, Ableitungen und Integrale sind herzuleiten.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

1) Analysis [13 Punkte]

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$.

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Lage und Art des Extrempunkts, Wendepunkt (dritte Ableitung weglassen). [5.5P]

b) Berechnen Sie folgende Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$.
Berechnen Sie ausserdem den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$.
Zeichnen Sie den Graphen von f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem. [4.5P]

c) Der Punkt $P(u/v)$ ist ein Punkt des Graphen von f mit $u>1$. Die Koordinatenachsen und ihre Parallelen durch P begrenzen ein Rechteck. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P, für den das Rechteck einen minimalen Flächeninhalt hat. [3P]

2) Vektorgeometrie [13 Punkte]

Gegeben sind die Ebene E: $y-z-1=0$,

die Geradenschar g_k: $\vec{r}=\begin{pmatrix}-k^2\\0\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$ $(k\in R)$ und die Gerade h: $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1. a) Zeigen Sie: Alle Geraden der Schar g_k sind parallel zueinander und liegen in der Ebene E. [1.5P]

b) Für welche Werte von k schneidet g_k die Gerade h? Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S. [2.5P]

c) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Gerade h und der Ebene E in Grad auf eine Nachkommastelle gerundet. [1.5P]

2. Die Ebene E ist Tangentialebene an zwei Kugeln K_1 und K_2 mit den Radien $R_1 = R_2 = 5\sqrt{2}$, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 auf der Geraden h liegen.

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten von M_1 und M_2.
   → Teilergebnis: $M_1(2 / 5 / -6)$ [2.5P]

   b) Zeigen Sie, dass die Punkte A(-1 / 0 / -2) und C(-1 / 1 / -1) auf der Kugel K_1 um M_1 liegen, und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B so, dass die Strecke [AB] ein Durchmesser von K_1 ist.
   → Teilergebnis: B(5 / 10 / -10) [2P]

   c) Das Dreieck ABC ist die Grundfläche einer Pyramide ABCD, deren Spitze D ebenfalls auf der Kugel K_1 liegt. Alle Punkte D, für die die Pyramide ABCD das Volumen 11 hat, bilden zwei Kreise auf der Kugelfläche (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Höhe h einer solchen Pyramide und den Radius der beiden Kreise.
   → Teilergebnis: $h = \sqrt{11}$ [3P]

3) Analysis [12 Punkte]

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{x^3 - 2a^2x}{x^2 + a^2}$ $(a > 0)$.

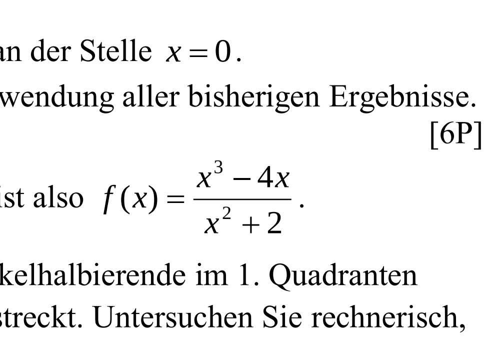
a) Untersuchen Sie die Funktionenschar: Definitionsmenge, Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Führen Sie eine Polynnomdivision durch und bestimmen Sie die Gleichung der Asymptoten.

Berechnen Sie ausserdem die Tangentensteigung an der Stelle $x = 0$.
Skizzieren Sie den Graphen für $a = \sqrt{2}$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse. [6P]

In den beiden Teilaufgaben b) und c) sei $a = \sqrt{2}$, es ist also $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 2}$.

b) Der Graph von f, die Gerade $x = 2$ und die Winkelhalbierende im 1. Quadranten begrenzen eine Fläche, die sich ins Unendliche erstreckt. Untersuchen Sie rechnerisch, ob diese Fläche einen endlichen Inhalt hat. [3P]

c) Die Funktion $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$ ist eine Integralfunktion von f. Der Graph von F ist nebenstehend skizziert (willkürliche Einheiten für die x- und y-Achse).



Bestimmen Sie anhand der Eigenschaften der Funktion f ohne Berechnung des Integrals:

(i) die Nullstellen von F,
(ii) die Stellen, an denen der Graph von F eine waagerechte Tangente hat. Begründen Sie, warum der Graph von F an der Stelle $x = 0$ einen Hochpunkt hat. [3P]

4) Stochastik [13 Punkte]

Wahrscheinlichkeiten sind auf drei Nachkommastellen gerundet anzugeben.

In einem Tonstudio wird eine CD mit 8 Liedern und 5 Instrumentalstücken zusammengestellt.

a) Auf wie viele Arten können die 13 Musikstücke angeordnet werden, wenn nur zwischen den Kategorien Lied und Instrumentalstück unterschieden wird? [0.5P]

b) Die CD wird so abgespielt, so dass die 13 Musikstücke in zufälliger Reihenfolge ohne Wiederholung aufeinander folgen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten vier gespielten Stücken höchstens zwei Instrumentalstücke sind? [2P]

Von allen in einem Musikladen verkauften CDs entfallen 25 % auf klassische Musik und 30 % auf Volksmusik. Der Rest wird der Popmusik zugeordnet. 60 % der Käufer einer Klassik-CD und 25 % der Käufer einer Popmusik-CD sind älter als 30 Jahre. Insgesamt werden 48 % der verkauften CDs von Kunden erworben, die älter als 30 Jahre sind.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Kunde höchstens 30 Jahre alt, wenn er eine Volksmusik-CD kauft? [2.5P]

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kauft ein Kunde, wenn er älter als 30 Jahre ist, eine Klassik- oder Popmusik-CD? [2P]

Der Musikladen bezieht seine Ware zu gleichen Teilen von den Grosshändlern A und B. A liefert ausnahmslos Orginalware. In jeder Lieferung des Grosshändlers B befinden sich 15 % willkürlich eingestreute Raubkopien, die am fehlenden Kopierschutz erkennbar sind.

e) Wie viele zufällig aus dem Musikladen ausgewählte CDs muss man mindestens überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens eine Raubkopie zu entdecken. Rechnen Sie wie bei „Ziehen mit Zurücklegen“. [2P]

Der Betrug von Grosshändler B wurde aufgedeckt. Er behauptet, dass er keinesfalls mehr als 15 % Raubkopien untergemischt habe (Nullhypothese). Es werden zufällig 200 CDs aus seinen Lieferungen ausgewählt und überprüft.

f) Bestimmen Sie den Annahmebereich für die Behauptung des Grosshändlers auf dem Signifikanzniveau 5 %. [2.5P]

g) Angenommen, der Raubkopieanteil betrug in Wirklichkeit 25 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man bei gleicher Entscheidungsregel wie in f) der Behauptung des Grosshändlers zustimmen, obwohl sie falsch ist? [1.5P]

5) Zwei unabhängige Teilaufgaben [9 Punkte]

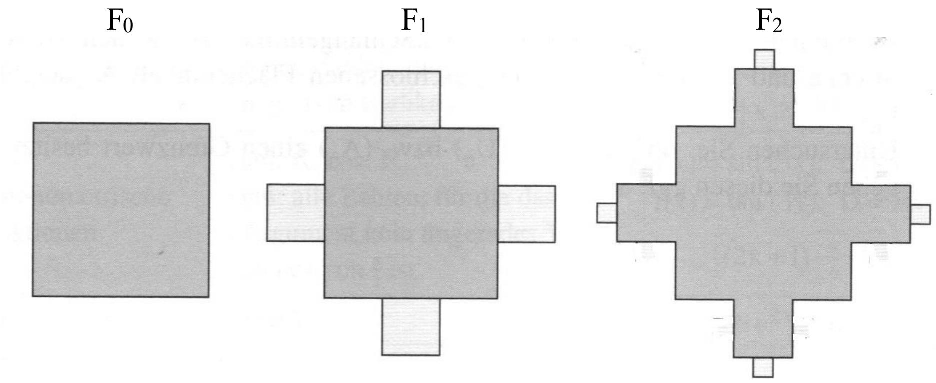
5.1 Durch die komplexe Funktion $f(z) = i \cdot z^2 + 2i \quad (z \in C)$ ist eine Abbildung in der Gaussschen Zahlenebene gegeben.

Aufgabe 5.1 ist ohne Taschenrechner zu lösen.

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung. [2P]

b) Die Gerade g ist parallel zur imaginären Achse und verläuft durch den Punkt $z = 1$. Zeigen Sie durch Rechnung, dass das Bild der Geraden g eine Parabel ist. Zeichnen Sie diese zusammen mit g in die Gausssche Zahlenebene ein. [3P]

5.2 Ausgangsfigur F_0 ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 1. Alle Seiten des Quadrats werden gedrittelt und an das mittlere Drittel jeder Seite wird ein Quadrat angefügt. Bei der entstehenden neuen Figur F_1 wird von allen eben angefügten Quadraten die jeweils nach aussen zeigende Seite gedrittelt und an deren mittleres Drittel wiederum ein Quadrat angefügt. Diese Vorgehensweise wird jeweils mit der neu entstanden Figur wiederholt. So entsteht eine Folge F_n von Figuren.



a) Berechnen Sie die Flächeninhalte A_1, A_2 und A_3 der Figuren F_1, F_2 und F_3 (exakte Werte). [1.5P]

b) Beweisen Sie: Der Flächeninhalt der Figur F_n beträgt

$$A_n = \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \frac{1}{9^n}\right) \quad (n \geq 0).$$ [2.5P]